Μαθημα 12 18/4/2018

Κλασσικη Μηχ.

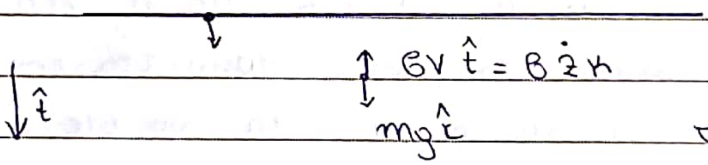
Παραδειγμα

Πτωση με αλεξιπτωτο

Τη χρονικη στιγμη $t=0$ ενας αλεξιπτωτιστης βαρους mg πεφτει απο το σημειο $z=0$ κατακορυφα με ταχυτητα v_0. Αν η αντισταση του αερα ειναι αναλογη της ταχυτητας, να βρειτε τη θεση και τη ταχυτητα του σε καθε χρονικες στιγμες

απαντηση

mg $\quad t=0 \quad \dot{z}(t=0)=v_0$



$t=0$

$\hat{t}$

$bv\,\hat{t} = b\dot{z}\,k$ αντισταση αναλογη της ταχυτητας

$mg\,\hat{t}$

Απο το 2ο νομο του Νευτωνα. $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = (mg - bv)$

2ης ταξης, γραμμ. με σταθ. συντ. $\longrightarrow$ $= mg - b\dot{z} \Rightarrow$

$m\ddot{z} + b\dot{z} = mg \Rightarrow$

1ου βαθμου, γραμμικη η ομογενεια που ειναι αδιαφορη

$\begin{cases} m\dot{v} + bv = mg \\ v = \dot{z} \end{cases}$

λυση με ολοκληρωτικους παραγοντες

Απο διαφορικες

$y' = f(x)$

$y' + py = q \Rightarrow \mu y' + \mu p y = \mu q$

$= (\mu y)'$

$= \mu' y + \mu y' \quad , \quad \mu = e^{\int p\,dx}$

Αρα $y' + py = q \Rightarrow (y e^{\mu})' = q e^{\mu}$

$y = e^{-\int p\,dx}\left[\int q\, e^{\int p\,dx} + c\right]$

$$\dot{v} + \frac{b}{m} v = g \Rightarrow (v e^{b/mt})' = g e^{b/vt}$$

$$v(t) = e^{-b/mt} \left[\int g e^{b/mt} dt + c \right] \Rightarrow v(t) = \frac{gm}{b} + c e^{-bt/m}$$

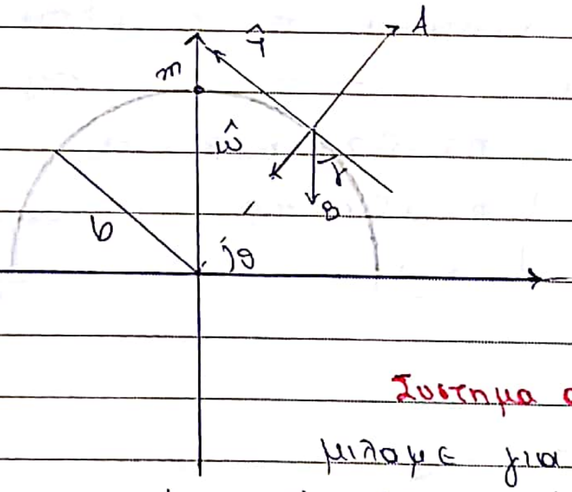
$$v(0) = v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{gm}{b} + c \Rightarrow c = v_0 - \frac{gm}{b}$$

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{gm}{b} \right) e^{-bt/m} + \frac{gm}{b}$$

Παράδειγμα

Ένα υλικό σημείο μάζας m εκτελεί κίνηση πάνω σε κύκλο ακτίνας ο. Τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη κορυφή του κύκλου και αφήνεται να γλίστρα πάνω στη περιφέρεια του. Να βρεθεί το σημείο πάνω στο οποίο εγκαταλείπει τον κύκλο και η ταχύτητα του στο σημείο αυτό.

απάντηση



Σύστημα αξόνων TBN

μιλάμε για κυκλική κίνηση

Άρα $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{N}$

Scanned by CamScanner

Νόμος Νεύτωνα

$$\begin{cases} \hat{\theta} & m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = A - B\sin\theta \\ \hat{r} & m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = B\cos\theta \end{cases}$$

$r = b = \sigma\tau\alpha\theta.$

$$\begin{cases} b\ddot{\theta} = A - B\sin\theta = \frac{A}{m} - g\sin\theta \\ -b\dot{\theta}^2 = g\cos\theta \end{cases}$$

α) παραγωγίζω την πρώτου βαθμού και συγκρίνω τις εξισώσεις

ή

β) πολλ/ζω τη δευτέρου βαθμού με $\dot{\theta}$ ολοκληρώνω και συγκρίνω προφανώς $\theta = \frac{\pi}{2}$, $t=0 \rightsquigarrow \dot{\theta}(0) = 0$

Διάγραμμα φάσης

Η πλήρης μελέτη της κίνησης ενός υλικού σημείου σε μια διάσταση επιβάλλει τη λύση διαφορικών εξισώσεων αυτής της μορφής $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ που εν γένει είναι δύσκολο ή αδύνατο να λυθεί:

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της κίνησης, δηλ. γράφουμε κατ' αρχήν την εξίσωση ως σύστημα δηλ. θέτω $y = \dot{x}$ έτσι ώστε

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ \dot{x} = y \end{cases}$$

Το σύστημα των εξισώσεων δεν περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή και καλείται αυτόνομο. Στη γενική του μορφή ένα αυτόνομο σύστημα είναι της μορφής

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases}$$ F, G διαφορίσιμες συναρτήσεις

Παρατηρούμε ότι για τις λύσεις $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ (αν αυτές υπάρχουν)

$\dot{x}=\dot{y}=0$ δηλ. μπορεί να υπάρχουν λύσεις για τις οποίες δεν υπάρχει καμία δυναμική, δηλ. παραμένουν σταθερές

Ορισμός

Έστω το σημείο (x^*, y^*) του συστήματος

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases}$$ για το οποίο $F(x^*, y^*) = 0 = G(x^*, y^*)$

Το σημείο καλείται κρίσιμο σημείο και η αντίστοιχη λύση εφόσον ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} x(t) = x^* \\ y(t) = y^* \end{cases}$$ καλείται λύση ισορροπίας

Οι λύσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$ ορίζουν ένα νέο σύστημα συντεταγμένων με οριζόντιο άξονα τον x και κάθετο τον y. Το επίπεδο αυτό καλείται χώρος των φάσεων, δηλ. για κάθε χρονική στιγμή t ορίζω ένα (x,y) στο χώρο των φάσεων

Η ευρεση του χωρου

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow G = \frac{dy}{dx}\cdot F \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$$

Παραδειγμα

Θεωρουμε το συστημα $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -ky \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

Θελω να μετρησω τις μεταβολες του y ως προς x

Απαντηση

$1^{ος}$ τροπος

$\dot{x} = -x \Rightarrow x = c_1 e^{-t}$

$\dot{y} = -ky \Rightarrow y = c_2 e^{-kt}$

$y = c x^{k}$

$2^{ος}$ τροπος

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ky}{-x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = k\cdot\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$\ln y = k \ln x + c \Rightarrow y = c x^{k}$

Διακρινουμε περιπτωσεις

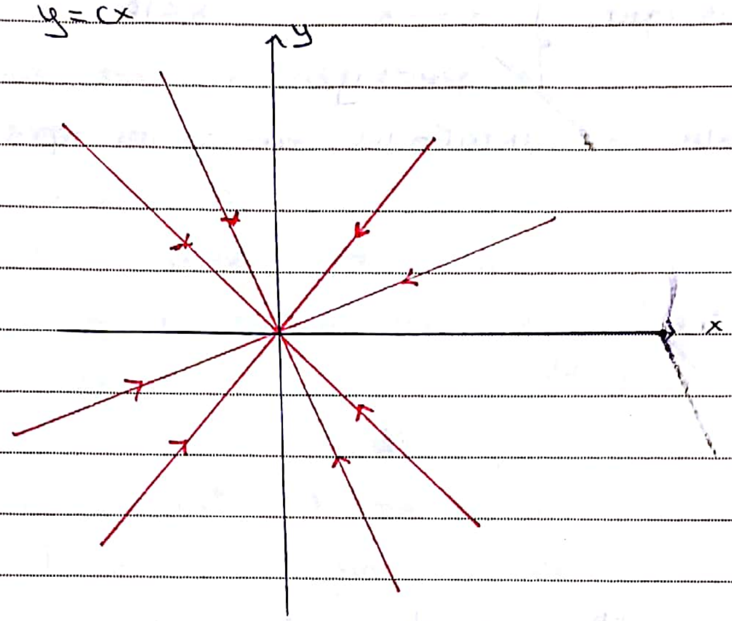
1) $k > 0$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

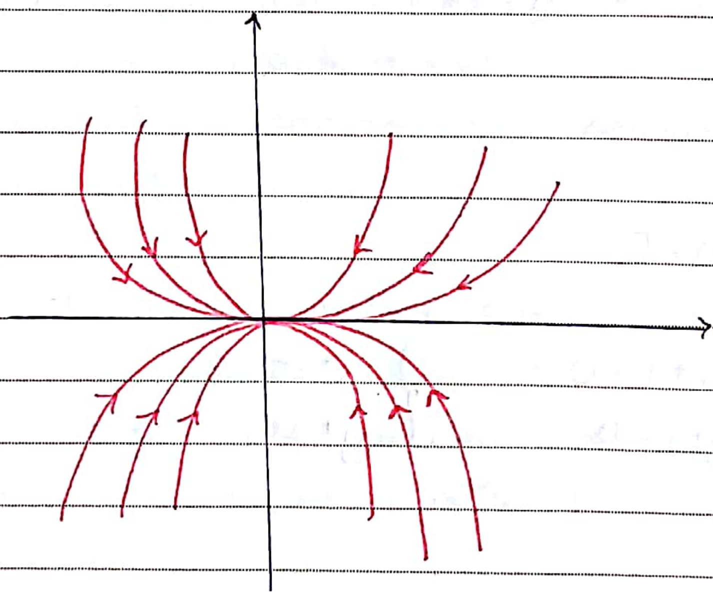
Ομως $\begin{cases} G(x^*, y^*) = 0 \\ F(x^*, y^*) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \\ y^* = 0 \end{cases}$

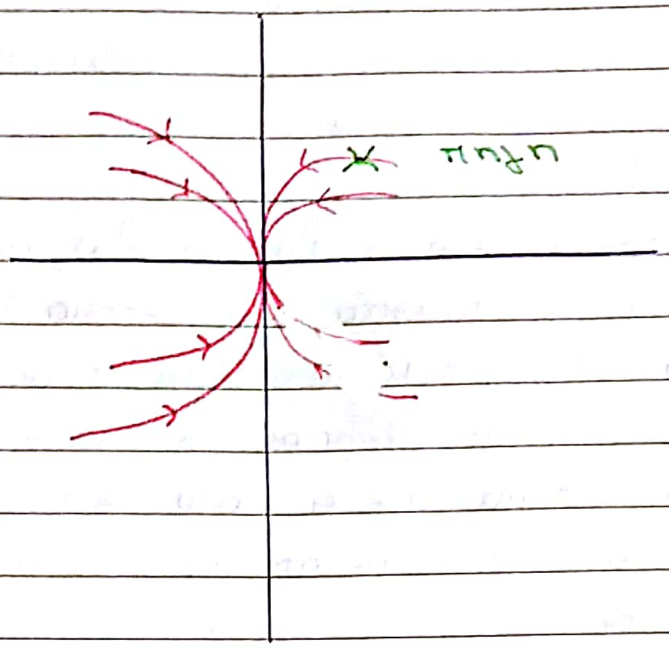
Η λυση λοιπον τεινει ασυμπτωτικα στο κρισιμο σημειο. Τοτε το σημειο ισορροπιας λεγεται σημειο συσσωρευσης (sink). Για τις διαφορες τιμες του κ εχω διαφορετικα διαγραμματα φασεως, δηλ:

$\kappa = 1$: $y = cx$



$\kappa > 1$: $y = c x^{\kappa}$

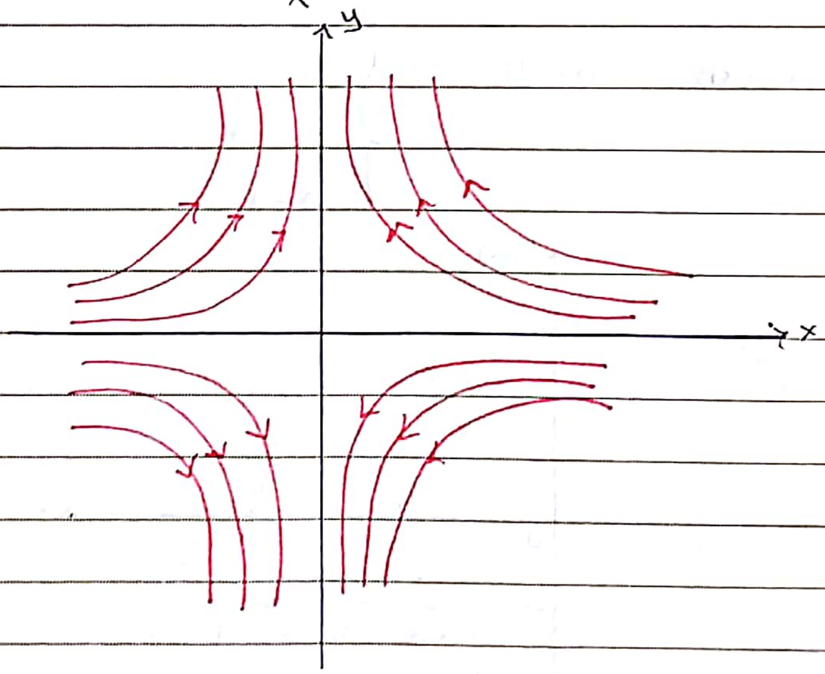




Σ' αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι το σημείο (0,0) είναι κόμβος, δηλαδή οι δυναμικές γραμμές έχουν φορά προς αυτό το σημείο. Αν έχουν φορά εκτός από το αυτό καλείται πηγή.

2) $k<0$

$$y = cx^k = cx^{-|k|} = \frac{c}{x^{|k|}}$$



Στη περίπτωση αυτή το $(x^*, y^*) = (0,0)$ λέγεται σαγματικό σημείο.